

1.3. Prüfungsaufgaben zu Bruchgleichungen

Aufgabe 1: Lineare Bruchgleichungen ohne Variable im Nenner

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

$$a) \frac{3x+4}{8} + \frac{5x-4}{6} = \frac{2x-3}{4} + \frac{7}{12}$$

$$b) \frac{2x+3}{3} + \frac{2x-4}{5} = \frac{x-3}{6} + \frac{5}{2}$$

Lösungen:

$$a) \frac{3x+4}{8} + \frac{5x-4}{6} = \frac{2x-3}{4} + \frac{7}{12} \quad | \cdot 24$$

$$9x + 12 + 20x - 16 = 12x - 18 + 14 \quad | -12x; +4$$

$$17x = 0$$

$$\Rightarrow L = \{0\}$$

$$b) \frac{2x+3}{3} + \frac{2x-4}{5} = \frac{x-3}{6} + \frac{5}{2} \quad | \cdot 30$$

$$20x + 30 + 12x - 24 = 5x - 15 + 75 \quad | -5x; -6$$

$$27x = 54 \quad | :27$$

$$\Rightarrow L = \{2\}$$

Aufgabe 2: Lineare Bruchgleichung mit Variable im Nenner ohne binomische Formeln

Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen auf der Grundmenge $G = \mathbb{R}$:

$$a) \frac{x-5}{x-2} = 1 - \frac{x+1}{x-2}$$

$$b) 3 - \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-4}{x-1}$$

$$c) \frac{2}{1+2x} = \frac{9}{3+6x} - \frac{1}{4-x}$$

$$d) \frac{1}{x-3} + \frac{3}{x} = \frac{6}{2x} + \frac{1}{2x-6}$$

Lösungen

$$a) \frac{x-5}{x-2} = 1 - \frac{x+1}{x-2} \quad | \cdot (x-2) \quad D = \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad (2)$$

$$x-5 = x-2-x-1 \quad | +5 \quad (1)$$

$$x = 2 \quad | \text{ mit Definitionsmenge vergleichen} \quad (1)$$

$$\Rightarrow L = \{\} \quad (1)$$

$$b) 3 - \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-4}{x-1} \quad | \cdot (x-1) \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad (2)$$

$$3x - 3 - x - 2 = x - 4 \quad | -x; +5 \quad (1)$$

$$x = 1 \quad | \text{ mit Definitionsmenge vergleichen} \quad (1)$$

$$\Rightarrow L = \{\} \quad (1)$$

$$c) \frac{2}{1+2x} = \frac{9}{3+6x} - \frac{1}{4-x} \quad | \cdot 3(1+2x)(4-x) \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\} \quad (2)$$

$$24 - 6x = 36 - 9x - 3 - 6x \quad | +9x; -24 \quad (1)$$

$$9x = 9 \quad | :9 \text{ und mit Definitionsmenge vergleichen} \quad (1)$$

$$\Rightarrow L = \{1\} \quad (1)$$

$$d) \frac{1}{x-3} + \frac{3}{x} = \frac{6}{2x} + \frac{1}{2x-6} \quad | \cdot 2x(x-3) \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\} \quad (2)$$

$$2x + 6x - 18 = 6x - 18 + x \quad | -x \quad (1)$$

$$x = 0 \quad | \text{ mit Definitionsmenge vergleichen} \quad (1)$$

$$\Rightarrow L = \{\} \quad (1)$$

Aufgabe 3: Lineare Bruchgleichung mit Variable im Nenner und binomischen Formeln

Bestimme Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen auf der Grundmenge $G = \mathbb{R}$:

- a) $\frac{5}{x+1} = \frac{8}{x} - \frac{3}{x-1}$
 b) $\frac{5}{x} - \frac{3}{x+2} = \frac{2}{x-2}$
 c) $\frac{4}{x^2-8x+16} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-4}$
 d) $\frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2-9} = \frac{1}{(x+3)^2}$
 e) $\frac{2}{x-4} - \frac{x-2}{x^2-8x+16} - \frac{1}{x} = 0$
 f) $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2-6x+9} + \frac{5}{x^2-3x}$
 g) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2+6x+9} = \frac{x+1}{x^2+3x}$
 h) $\frac{1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x^2-2x}$
 i) $\frac{1}{x^2+3x} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{1}{x^2-3x}$
 j) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2+6x+9} = \frac{x+1}{x^2+3x}$
 k) $\frac{2x}{x^2-5x+6} - \frac{x+2}{x^2-3x} = \frac{x+3}{x^2-2x}$
 l) $\frac{2}{x-5} - \frac{x+25}{x^2+10x+25} - \frac{1}{x+5} = 0$
 m) $\frac{2}{x-3} - \frac{x+9}{x^2-9} - \frac{1}{x} = 0$
 n) $\frac{2x+60}{x^2-25} - \frac{7}{x-5} = \frac{6}{x+5}$
 o) $\frac{5}{2-5x} - \frac{12x+18}{4-25x^2} + \frac{4}{2+5x} = 0$

Lösungen:

- a) $\frac{5}{x+1} = \frac{8}{x} - \frac{3}{x-1} \quad | \cdot x(x-1)(x+1)$
 $5x(x-1) = 8(x-1)(x+1) - 3x(x+1) \quad | \text{ausmultiplizieren}$
 $5x^2 - 5x = 8x^2 - 8 - 3x^2 - 3x \quad | -5x^2; +3x$
 $-2x = -8 \quad | : (-2)$
 $\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\} \text{ und } L = \{4\}$
- b) $\frac{5}{x} - \frac{3}{x+2} = \frac{2}{x-2} \quad | \cdot x(x-2)(x+2)$
 $5x^2 - 20 - 3x^2 + 6x = 2x^2 + 4x \quad | -2x^2; -6x$
 $-20 = -2x \quad | : (-2)$
 $\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\} \text{ und } L = \{10\}$
- c) $\frac{4}{x^2-8x+16} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-4} \quad | \cdot x(x-4)^2$
 $4x = x^2 - 8x + 16 - x^2 + 4x \quad | -x^2; +4x$
 $8x = 16 \quad | : 8$
 $\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\} \text{ und } L = \{2\}$
- d) $\frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2-9} = \frac{1}{(x+3)^2} \quad | \cdot (x-3)(x+3)^2$
 $x^2 + 6x + 9 - x^2 - 3x = x - 3 \quad | -x; -9$

$$2x = -12 \quad | :2$$

$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ und $L = \{-6\}$

e)
$$\frac{2}{x-4} - \frac{x-2}{x^2-8x+16} - \frac{1}{x} = 0 \quad | \cdot x(x-4)^2$$

$$2x^2 - 8x - x^2 + 2x - x^2 + 8x - 16 = 0 \quad | +16$$

$$2x = 16 \quad | :2$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$$
 und $L = \{8\}$

f)
$$\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2-6x+9} + \frac{5}{x^2-3x} = 0 \quad | \cdot x(x-3)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 - x^2 + 5x - 15 = 0 \quad | +6$$

$$-x = 6 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$$
 und $L = \{-6\}$

g)
$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2+6x+9} = \frac{x+1}{x^2+3x} \quad | \cdot x(x+3)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 - 2x = x^2 + 4x + 3 \quad | -x^2; -4x$$

$$9 = 3$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$$
 und $L = \{\}$

h)
$$\frac{1}{x^2+2x} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x^2-2x} \quad | \cdot x(x+2) \cdot (x-2)$$

$$x-2-2x = x+2 \quad | +x$$

$$-2 = 2$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$$
 und $L = \{\}$

i)
$$\frac{1}{x^2+3x} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{1}{x^2-3x} \quad | \cdot x(x+3)(x-3)$$

$$x-3-2x = x+3 \quad | -x; +3$$

$$-2x = 6 \quad | :(-2)$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 3\}$$
 und $L = \{\}$

j)
$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2+6x+9} = \frac{x+1}{x^2+3x} \quad | \cdot x(x+3)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 - 2x = x^2 + 4x + 3 \quad | -x^2; -4x$$

$$9 = 3$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$$
 und $L = \{\}$

k)
$$\frac{2x}{x^2-5x+6} - \frac{x+2}{x^2-3x} = \frac{x+3}{x^2-2x} \quad | \cdot x(x-2)(x-3)$$

$$2x^2 - x^2 + 4 = x^2 - 9 \quad | -x^2$$

$$4 = -9$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2; 3, 0\}$$
 und $L = \{\}$

l)
$$\frac{2}{x-5} - \frac{x+25}{x^2+10x+25} - \frac{1}{x+5} = 0 \quad | \cdot (x-5)(x+5)^2$$

$$2x^2 + 20x + 50 - x^2 - 20x + 125 - x^2 + 25 = 0 \quad | \text{zusammenfassen}$$

$$200 = 0$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{Q} \setminus \{-5, 5\}$$
 und $L = \{\}$

m)
$$\frac{2}{x-3} - \frac{x+9}{x^2-9} - \frac{1}{x} = 0 \quad | \cdot x(x-3)(x+3)$$

$$2x^2 + 6x - x^2 - 9x - x^2 + 9 = 0 \quad | +3x$$

$$9 = 3x \quad | :3$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$$
 und $L = \{\}$

n)
$$\frac{2x+60}{x^2-25} - \frac{7}{x-5} = \frac{6}{x+5} \quad | \cdot (x-5)(x+5)$$

$$2x + 60 - 7x - 35 = 6x - 30 \quad | +50; +5x$$

$$55 = 11x \quad | :11$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$$
 und $L = \{\}$

$$\begin{aligned} \text{o) } \quad \frac{5}{2-5x} - \frac{12x+18}{4-25x^2} + \frac{4}{2+5x} &= 0 && | \cdot (2-5x)(2+5x) \\ 10 + 25x - 12x - 18 + 8x - 20x &= 0 && | +8 \\ & && x = 8 \end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{5}; \frac{2}{5} \right\} \text{ und } L = \{8\}$$

Aufgabe 4: Lineare Bruchgleichungen mit Variable im Nenner und Parameter

Bestimme die Definitions- und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung auf der Grundmenge \mathbb{R} in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } \frac{2x-a}{4x^2+12x+9} = \frac{a-1}{4x+6}$$

$$\text{b) } \frac{x^2+a^2}{x^2-ax} - \frac{a^2+1}{ax-a^2} = 1$$

Lösungen:

$$\text{a) } \frac{2x-a}{4x^2+12x+9} = \frac{a-1}{4x+6} \quad | \cdot 2(2x+3)^2 \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\} \quad (2)$$

$$4x-2a = 2ax-2x+3a-3 \quad | +2a; -2ax; +2x \quad (1)$$

$$(6-2a)x = 5a-3 \quad | : (6-2a) \quad (1)$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \frac{5a-3}{6-2a} \right\}, \text{ falls } a \neq 6 \text{ und } L = \{ \}, \text{ falls } a = 6. \quad (3)$$

$$\text{b) } \frac{x^2+a^2}{x^2-ax} - \frac{a^2+1}{ax-a^2} = 1 \quad | \cdot ax(x-a) \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; a\} \quad (2)$$

$$ax^2+a^3-a^2x-x = ax^2-a^2x \quad | -ax^2; +a^2x; +x \quad (1)$$

$$a^3 = x \quad (1)$$

$$\Rightarrow L = \{a^3\} \quad (3)$$